CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „ŞTEFAN DÂRŢU”

EDIŢIA A XIX-A - VATRA DORNEI

8-10 DECEMBRIE 2017

SOLUȚII

Clasa a XI-a

Subiectul 1.

a) Rezolvați în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ ecuația : $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

b) Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $(TrA)^2 \neq (TrB)^2$. Demonstrați că, dacă $A+B$ comută cu $AB+BA$, atunci A comută cu B.

Solutie subiectul 1.a)

Soluția 1. Fie λ_1, λ_2 valorile proprii ale matricei X. Atunci $\lambda^3{}_1, \lambda_2{}^3$ sunt valorile proprii ale matricei X^3 ...**1p**

Ecuația caracteristică a matricei X^3 este : $\lambda^2 - 18\lambda + 1 = 0$, de unde $\begin{cases} \lambda_1^3 + \lambda_2^3 = 18 \\ \lambda_1^3 \cdot \lambda_2^3 = 1 \end{cases}$ **1p**

Obținem $\lambda_1 + \lambda_3 = 3$, iar din Cayley-Hamilton pentru X, rezultă $X^3 = 8X - 3I_2$, deci $8X = X^3 + 3I_2$. În final obținem soluția $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ **2p**

Soluția 2. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din $X^3 \cdot X = X \cdot X^3 \Rightarrow b = c$ și $d = a + 4b$ **(1)**...**1p**

Din $\det X = 1 \Rightarrow a^2 + 4ab - b^2 = 1 \Rightarrow (a+2b)^2 = 5b^2 + 1$ **(2)**

Din Cayley-Hamilton $\Rightarrow X^3 = (\alpha^2 - 1) \cdot X - \alpha \cdot I_2$, unde $\alpha = TrX = 2a + 4b$, obținem : **1p**

$(\alpha^2 - 1)a - \alpha = 1$ și $(\alpha^2 - 1)b = 4$ **(3)**. Din (2) $\Rightarrow \alpha^2 = 4(5b^2 + 1)$ **(4)**...**1p**

Din **(4)** și **(3)** $\Rightarrow (20b^2 + 3)b = 4$, de unde $b = \frac{1}{2}$ și $\alpha = 3$. În final soluția este $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ **1p**

Soluție subiectul 1.b)

$$\left(A+B\right)\left(AB+BA\right)=\left(AB+BA\right)\left(A+B\right)\Leftrightarrow A^2B+ABA+BAB+B^2A=ABA+AB^2+BA^2+BAB\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow A^2B-BA^2=AB^2-B^2A$ **(1)**..**1p**

Din Cayley-Hamiltion $\Rightarrow A^2=Tr\left(A\right)A-\det A\cdot I_2$ și $B^2=Tr\left(B\right)B-\det B\cdot I_2$ **(2)**......................................**1p**

Din **(1)** și **(2)** rezultă :

$Tr\left(A\right)AB-\det A\cdot B-Tr\left(A\right)BA+\det A\cdot B=Tr\left(B\right)AB-\det B\cdot A-Tr\left(B\right)BA+\det B\cdot A\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Tr\left(A\right)\cdot\left(AB-BA\right)=Tr\left(B\right)\cdot\left(AB-BA\right)$ și cum $Tr\left(A\right)\neq Tr\left(B\right)$ obținem $AB=BA$.................................**1p**

Subiectul 2.

a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n+1]{\left(n+1\right)!}}{\sqrt[n]{n!}}$.

b) Fie șirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n=\left\{n^2\cos\dfrac{1}{n}\right\},\forall n\geq 1$, unde $\left\{x\right\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Soluție subiectul 2.a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{\left(n+1\right)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{\left(n+1\right)!}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{e}\cdot e\cdot 1=1$$

....**2p**

Soluție subiectul 2.b)

Considerăm :

$$\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot 2\sin^2\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{\sin^2\frac{2}{n}}{\left(\frac{2}{n}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

....**2p**

Rezultă că există un $n_0\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n^2\cdot\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)\in\left(0,1\right),\ \forall n\geq n_0$ **1p**

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{n^2-n^2\cdot\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{1-n^2\cdot\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}1-n^2\cdot\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

....................**2p**

Subiectul 3.

Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n=\dfrac{(n!)^n}{(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot n!)^2}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{x_n}$.

Soluție subiectul 3.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln x_n}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{n^2}}=L$ **1p**

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_n}{n^2}\underset{S-C}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_{n+1}-\ln x_n}{(n+1)^2-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_{n+1}-\ln x_n}{2n+1}\underset{S-C}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$ **1p**

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x_{n+2}-2\ln x_{n+1}+\ln x_n}{(2n+3)-(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{x_{n+2}\cdot x_n}{x_{n+1}^2}=$ **2p**

$=\dfrac{1}{2}\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{((n+2)!)^{n+2}\cdot(n!)^2}{((n+1)!)^{2n+2}}\cdot\dfrac{(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot(n+1)!)^4}{(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot(n)!)^2\cdot(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot(n+2)!)^2}\right)=$ **1p**

$=\dfrac{1}{2}\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^{2n+2}\cdot[(n+1)(n+2)]^{n+2}}{(n!)^{2n+2}\cdot(n+1)^{2n+2}}\cdot\dfrac{((n+1)!)^4}{((n+1)!)^2\cdot((n+2)!)^2}\right)=$ **1p**

$=\dfrac{1}{2}\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+2}\cdot(n+2)^n}{(n+1)^{2n+2}}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n\right)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow L=\sqrt{e}$ **1p**