BAREM CLASA a X-a

Problema 1. Considerăm date numerele strict pozitive *a*, *b*, *c*. Să se rezolve sistemul de inecuații cu necunoscutele strict pozitive x, y, z:

$$(a-1)x+\frac{y}{b}\le z, \qquad (b-1)y+\frac{z}{c}\le x, \qquad (c-1)z+\frac{x}{a}\le y .$$

Gazeta Matematică

Soluție: Dacă tripletul (x,y,z) este o soluție a sistemului, adunând cele trei inecuații obținem

$$\left(a+\frac{1}{a}-2\right)x+\left(b+\frac{1}{b}-2\right)y+\left(c+\frac{1}{c}-2\right)z\le 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a-1)^2}{a}\cdot x+\frac{(b-1)^2}{b}\cdot y+\frac{(c-1)^2}{c}\cdot z\le 0 .$$

Ținând cont că $a,b,c\in(0,\infty)$ și că $x,y,z\in(0,\infty)$ deducem că relația de mai sus are loc dacă și numai dacă $a=b=c=1$. **(3 puncte)**

Pentru $a=b=c=1$ sistemul inițial devine $y\le z,\ z\le x,\ x\le y$, adică $x=y=z$.

În concluzie, dacă unul dintre numerele a,b,c este diferit de 1 atunci sistemul nu are soluții, iar dacă $a=b=c=1$ atunci sistemul are o infinitate de soluții $x=y=z=\lambda$ unde $\lambda>0$. **(3 puncte)**

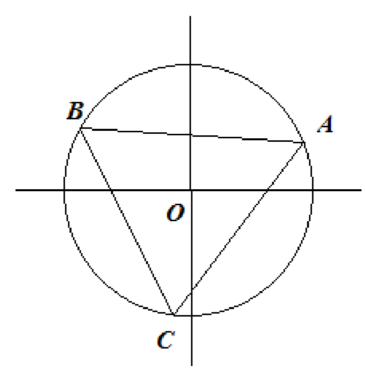
Problema 2. Fie $a, b, c\in\mathbb{C}$ astfel încât $|a|=|b|=|c|=1$. Dacă a, b și c sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral, demonstrați că există o infinitate de valori $n\in\mathbb{N}$ pentru care numerele complexe a^n, b^n și c^n sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Vladimir Cerbu

Soluție: Deoarece $z\cdot\overline{z}=|z|^2$, avem $a\cdot\overline{a}=b\cdot\overline{b}=c\cdot\overline{c}=1$ adică $\overline{a}=\frac{1}{a},\ \overline{b}=\frac{1}{b}$ și $\overline{c}=\frac{1}{c}$. **(1 punct)**

Fie A, B, C punctele de afixe a, b respectiv c.

Evident, $|a|=|b|=|c|=1$ implică $A,B,C\in C(O,1)$.



Triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă centrul său de greutate coincide cu centrul cercului circumscris adică $a+b+c=0$.

Prin ridicare la pătrat obținem $a^2+b^2+c^2=-2ab-2bc-2ca=$

$$=-2abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=-2abc\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)=-2abc\overline{(a+b+c)}=0$$

Avem $|a^2|=|b^2|=|c^2|=1$ și $a^2+b^2+c^2=0$, deci a^2, b^2 și c^2 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral. **(3 puncte)**

Repetând raționamentul pentru numerele a^2, b^2 și c^2 obținem că a^4, b^4 și c^4 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral. Prin inducție se obține imediat că pentru orice $k\in\mathbb{N}$ numerele a^{2^k}, b^{2^k} și c^{2^k} sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral. **(2 puncte)**

Problema 3. Fie m media aritmetică a numerelor strict pozitive a, b și c. Demonstrați că

$$a^m \cdot b^m \cdot c^m \le a^a \cdot b^b \cdot c^c$$

Când are loc egalitatea?

***

Soluție: Logaritmând în baza zece ambii membri ai inegalității de demonstrat obținem:

$$\frac{a+b+c}{3}\left(\lg a+\lg b+\lg c\right)\le a\lg a+b\lg b+c\lg c \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(a-b\right)\left(\lg a-\lg b\right)+\left(b-c\right)\left(\lg b-\lg c\right)+\left(c-a\right)\left(\lg c-\lg a\right)\ge 0 \quad (1)$$ **(3 puncte)**

Inegalitatea (1) este adevărată deoarece pentru orice $x, y \in \left(0,\infty\right)$ diferențele $x-y$ și $\lg x-\lg y$ au același semn. **(2 puncte)**

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a=b=c$. **(1 punct)**