BAREM CLASA a XII-a

Problema 1. Fie funcția continuă $f:[0,1]\to(0,1]$ și F primitiva sa cu proprietatea că $F(0)=0$.

a) Să se arate că $x-F(x)\in[0,\,1],\ \forall x\in[0,\,1]$.

b) Să se determine funcția f știind că $f\left(x-F(x)\right)=f(x),\ \forall x\in[0,\,1]$.

Gazeta Matematică

Soluție: a) Avem $F'=f>0$, deci F este strict crescătoare, prin urmare $F(x)>0,\ \forall x\in[0,1]$.
Funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=x-F(x)$ este derivabilă și $g'(x)=1-f(x)\geq 0,\ \forall x\in[0,1]$. Deducem că funcția g este crescătoare, așadar $g(0)\leq g(x)\leq g(1),\ \forall x\in[0,\,1]$, ceea ce înseamnă că $0\leq x-F(x)\leq 1-F(1)<1,\ \forall x\in[0,\,1]$. **(3 puncte)**

b) Cu notația de la punctul a) ipoteza se rescrie $f\left(g(x)\right)=f(x),\ \forall x\in[0,\,1]$.

Fie $a\in[0,\,1]$, a fixat. Notăm $A=\left\{x\in[0,\,1]\ /\ f(x)=f(a)\right\}$. Mulțimea A fiind nevidă $(\,a\in A\,)$ și mărginită $(\,A\subset[0,1]\,)$, admite margine inferioară. Notăm $\inf A=\alpha\in[0,1]$. Atunci există un șir $(x_n)_{n\geq 1}\subset A$ cu $x_n\to\alpha$. Cum f este continuă în α obținem $f(x_n)\to f(\alpha)$, deci $f(a)=f(\alpha)$.
Avem $f(a)=f(\alpha)=f\left(g(\alpha)\right)$, adică $g(\alpha)\in A$. Dar $g(\alpha)=\alpha-F(\alpha)\leq\alpha=\inf A$, deci $g(\alpha)=\alpha$ adică $F(\alpha)=0$. De aici obținem $\alpha=0$, deci $f(a)=f(0)$. Cum a a fost ales arbitrar în $[0,\,1]$, rezultă că $f(x)=f(0),\ \forall x\in[0,\,1]$.

În concluzie, funcțiile căutate sunt funcțiile constante $f\equiv c$, unde $c\in(0,\,1]$. **(3 puncte)**

Problema 2. a) Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Calculați $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx$.

b) Arătați că $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2+x+1}\,dx=\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$.

***

Soluție. a) Avem succesiv: $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx=$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\frac{1}{n}}^{n}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2n+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{n}+1}{\sqrt{3}}\right)$$ **(2 puncte)**

b) Notăm $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+x+1}dx$. Deoarece $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$, $\forall x>0$, avem:

$$I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x^2+x+1}dx=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1}{x^2+x+1}dx-\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x^2+x+1}dx=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1}{x^2+x+1}dx+\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}dx$$

Cu schimbarea de variabilă $t=\frac{1}{x}$ obținem $\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}dx=\int_{n}^{\frac{1}{n}}\frac{\operatorname{arctg} t}{t^2+t+1}dt=-I_n$, deci

$$I_n=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1}{x^2+x+1}dx-I_n.$$ **(3 puncte)**

Ținând cont de punctul a) rezultă că $I_n=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2n+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{n}+1}{\sqrt{3}}\right)$.

În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$. **(1 punct)**

Problema 3. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $(G,\cdot)$ un grup de ordin *n*. Arătaţi că *n* este număr prim dacă şi numai dacă funcţiile $f_k:G\to G$, $f_k(x)=x^k$, $k\in\{1,2,3,...,n-1\}$ sunt automorfisme ale grupului $(G,\cdot)$.

Mihai Piticari

Soluție. Fie e elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$.

$(\Rightarrow)$ Dacă *n* este prim, conform teoremei lui Cauchy există $a\in G$ cu $\operatorname{ord}(a)=n$ și cum $\operatorname{ord}(G)=n$, rezultă că $G=\{e,a,a^2,\ ...,\ a^{n-1}\}$. Deducem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ. **(1 punct)**

Pentru orice $k\in\{1,2,3,...,n-1\}$ avem $f_k(x\cdot y)=(x\cdot y)^k=x^k\cdot y^k=f_k(x)\cdot f_k(y),\ \forall x,y\in G$, adică funcţia f_k este endomorfism al grupului $(G,\cdot)$. **(1 punct)**

Dacă $f_k(x)=f_k(y)\Rightarrow x^k=y^k\Rightarrow(xy^{-1})^k=e\Rightarrow\operatorname{ord}(x\cdot y^{-1})\leq k<n$. Cum n e prim și $\operatorname{ord}(x\cdot y^{-1})/n\Rightarrow\operatorname{ord}(x\cdot y^{-1})=1\Rightarrow x\cdot y^{-1}=e\Rightarrow x=y$, adică f_k este injectivă. **(1 punct)**

Cum G este mulţime finită, rezultă că f_k este bijectivă, prin urmare funcţia f_k este automorfism al grupului $(G,\cdot)$. **(1 punct)**

$(\Leftarrow)$ Reciproc, presupunem că toate funcţiile $f_k:G\to G$, $f_k(x)=x^k$, $k\in\{1,2,3,...,n-1\}$ sunt automorfisme ale grupului $(G,\cdot)$. Dacă *n* nu este prim, atunci există p prim, $p\in\{2,3,...,n-1\}$ așa încât p/n. Conform teoremei lui Cauchy, $(G,\cdot)$ conţine un element de ordin *p*. Fie acesta *a*.

Atunci $a^p=e\Rightarrow f_p(a)=f_p(e)$ cu $a\neq e$, adică funcţia f_p nu este injectivă, absurd! Prin urmare *n* este prim. **(2 puncte)**