Concursul Interjudețean de Matematică ”Memorialul Ștefan Dârțu”

Ediția a XIX-a Vatra Dornei 8-10 decembrie 2017

CLASA A IX-A

Problema 1. Fie a, b, c numere reale strict pozitive cu $a+b+c=1$. Arătați că:

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\geq 2$$

Gazeta matematică

Solutie.

Adunând în ambii membri $a+b+c$ și grupând convenabil, inegalitatea de demonstrat devine:

$$\left(\frac{a^2+b}{b+c}+a\right)+\left(\frac{b^2+c}{c+a}+b\right)+\left(\frac{c^2+a}{a+b}+c\right)\geq 2+(a+b+c)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\frac{a(a+b+c)+b}{b+c}+\frac{b(b+c+a)+c}{c+a}+\frac{c(c+a+b)}{a+b}\geq 2+(a+b+c)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geq 3$$ (3 puncte)

Ultima inegalitate se obține din inegalitatea mediilor astfel:

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}}=3$$ (2 puncte)

Vom avea egalitate dacă și numai dacă $\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}$ $adic$ă $a=b=c=\frac{1}{3}$ (1 punct)

Problema 2. Fie ABCD un patrulater înscris în cercul de centru O cu diagonalele perpendiculare. Notăm M, N mijloacele laturilor AB și CD, și notăm cu P intersecția diagonalelor.

Arătați că:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}.$$

Soluție.

Exprimăm medianele $\overrightarrow{OM}$ și $\overrightarrow{ON}$:

1p

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}.$$

Adunăm și obținem :

1p

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}.$$

Considerăm E și F mijloacele diagonalelor AC și BD. Exprimăm medianele $\overrightarrow{OE}$ și $\overrightarrow{OF}$

$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC},$

1p

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}.$$

Adunăm și obținem :

$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}.$

2p

Deoarece O este centrul cercului circumscris patrulaterului ABCD, OE și OF sunt mediatoarele segmentelor AC și BD. Cum AC și BD sunt perpendiculare, rezulta OEPF dreptunghi. Obținem :

1p

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}.$$

Problema 3. Arătați că există un număr natural nenul x astfel încât numărul $\frac{(1!)^{2016}\cdot(2!)^{2015}\dots\cdot(2016!)^{1}}{x!}$ să fie cub perfect. ($n! = 1\cdot 2\cdot 3\dots\cdot n.$).

Soluție.

Observăm că

$$(1!)^{2016}\cdot(2!)^{2015}\cdot(3!)^{2014} = (1!)^{2016}\cdot(2!)^{2015}\cdot(2!)^{2014}\cdot 3^{2013}\cdot 3 = (a_1)^3\cdot 3$$ 2p

$$(4!)^{2013}\cdot(5!)^{2012}\cdot(6!)^{2011} = (4!)^{2013}\cdot(5!)^{2012}\cdot(5!)^{2011}\cdot 6^{2010}\cdot 6 = (a_2)^3\cdot 6$$

și analoagele.

Înmulțim și observăm că numărătorul este de forma 3p

$$y^3\cdot 3\cdot 6\cdot\dots\cdot 2016 = y^3\cdot 3^{672}\cdot 672! = (y\cdot 3^{224})^3\cdot 672!.$$

Alegem $x = 672$și obținem concluzia problemei. 1p