Clasa a VI -a

SUBIECTUL I

Aflați numărul natural prim $\overline{abcd}$ știind că $\overline{ab}+\overline{cd}=p^2q^2+1$ și $\overline{ab}-\overline{cd}=q$, unde p și q sunt numere naturale prime.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....**(1p)**

Dacă p și q sunt simultan pare, atunci $\overline{ab}+\overline{cd}=17$ cu $a\neq 0$ și $c\neq 0$ conduce la o contradicție!

Dacă p și q sunt simultan impare, atunci $\overline{ab}+\overline{cd}=$ par și $\overline{ab}-\overline{cd}=$ impar, contradicție! ....**(1p)**

Dacă $q=2$, atunci $\overline{ab}=\overline{cd}+2$ și $\overline{ab}+\overline{cd}=$ impar, deci $2\cdot\overline{cd}+2=$ impar - nu convine. ....**(1p)**

Dacă $p=2$, atunci $\overline{ab}+\overline{cd}=4q^2+1$ și, cum $\overline{ab}=\overline{cd}+q$, avem relația $2\cdot\overline{cd}=4q^2-q+1$. ....**(1p)**

$q=3$ implică $2\cdot\overline{cd}=34$, de unde $\overline{cd}=17$ și $\overline{ab}=20$.

Deci $\overline{abcd}=2017$, soluție pentru că 2017 este prim. ....**(1p)**

$q=5$ implică $2\cdot\overline{cd}=96$, de unde $\overline{cd}=48$, nu convine.

$q=7$ implică $2\cdot\overline{cd}=190$, de unde $\overline{cd}=95$, nu convine.

$q\geqslant 11$ implică $\overline{cd}>100$, nu convine. ....**(1p)**

Deci $\overline{abcd}=2017$. ....**(1p)**

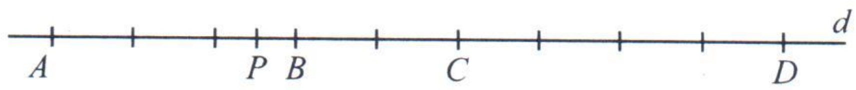
SUBIECTUL II

Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C, D în această ordine.

Dacă $2\cdot AB=BD$ și $4\cdot AC=5\cdot CD$, arătați că: **a)** $AB>BC$; **b)** $\dfrac{AP}{PD}+\dfrac{BC}{PB}>4\cdot\dfrac{BC}{AB}$, unde punctul P este mijlocul segmentului (AC).

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....**(1p)**



a) Din $2\cdot AB=BD$ rezultă că $2\cdot AB=BC+CD\Rightarrow 4\cdot AB=2BC+2CD$.
Din $4\cdot AC=5\cdot CD$ rezultă că $4\cdot(AB+BC)=5\cdot CD$. $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2BC+2CD+4BC=5\cdot CD\Rightarrow 6BC=3\cdot CD\Rightarrow CD=2\cdot BC$. ....**(1p)**

Deci $2\cdot AB=BC+CD=3BC$, de unde $AB=\dfrac{3}{2}\cdot BC$ și $AB>BC$. ....**(1p)**

b) Dacă $BC=2a$, atunci $CD=4a$; $AB=3a$; $AC=5a$; $AD=9a$. ....**(1p)**

P fiind mijlocul lui (AC), atunci $AP=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{5a}{2}$.

$PD=AD-AP=9a-\dfrac{5a}{2}=\dfrac{13a}{2}$.

$PB = AB - AP = 3a - \frac{5a}{2} = \frac{a}{2}$. ....(1p)

Deci $\frac{AP}{PD} + \frac{BC}{PB} = \frac{\frac{5}{2} \cdot a}{13 \cdot \frac{a}{2}} + \frac{2a}{\frac{a}{2}} = \frac{15}{13} + 4 = \frac{57}{13}$.

$4 \cdot \frac{BC}{AB} = 4 \cdot \frac{2a}{3a} = \frac{8}{3}$.

Însă $\frac{57}{13} > \frac{8}{3} \Leftrightarrow 57 \cdot 3 > 104$. ....(1p)

SUBIECTUL III

Determinați numerele naturale de trei cifre $\overline{xyz}$ scrise în baza zece știind că numărul n este cub perfect, unde $n = \overline{xyz} + 2 \cdot \overline{zy} + y + 1$.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....(1p)

$n = \overline{xyz} + 2 \cdot \overline{zy} + y + 1 = 100x + 13y + 21z + 1$, **(1)**

Cum $100x \leq 900$; $13y \leq 117$; $21z \leq 189 \Rightarrow n \leq 1000$. (fiind cub perfect)

Deci $n \in \{125; 216; 343; 512; 729; 1000\}$. ....(1p)

Cazul $n = 125$.

Din **(1)** rezultă $100x + 13y + 21z = 124$, de unde $x = 1$ și $13y + 21z = 24 \Rightarrow$ nu convine deoarece:

Din $3 / 21z$ și $3 / 24 \Rightarrow 3 / 13y$ și cum $(3,13) = 1 \Rightarrow 3 / y$, adică $y \in \{0; 3; 6; 9\}$.

$y = 0 \Rightarrow 21z = 24$, nu convine.

$y \geqslant 3 \Rightarrow 13y > 24$, nu convine. ....(1p)

Cazul $n = 216$.

Din **(1)** $\Rightarrow x \in \{1; 2\}$.

$x = 1 \xRightarrow{(1)} 13y + 21z = 115 = 105 + 10$, de unde $21 / 13y - 10 \Rightarrow 3 / 10 - y \Rightarrow y \in \{1; 4; 9\}$.

$y = 1 \Rightarrow 21z = 102 \Rightarrow 7 / 102$, nu convine.

$y = 4 \Rightarrow 21z = 63 \Rightarrow z = 3$.

Deci $\overline{xyz} =$ **143**, soluție.

$x = 2 \xRightarrow{(1)} 13y + 21z = 15$, nu convine. ....(1p)

Cazul $n = 343$.

Din **(1)** $\Rightarrow 100x + 13y + 21z = 342$, de unde $x \leq 3$.

$x = 1 \Rightarrow 13 / 8(z - 1) \Rightarrow 13 / z - 1 \Rightarrow z = 1$ și $13y = 221$, nu convine.

$x = 2 \Rightarrow 13 / z - 3 \Rightarrow z = 3$ și $13y = 79$, nu convine.

$x = 3 \Rightarrow z = 2$ și $y = 0$.

Deci $\overline{xyz} =$ **302**, soluție.

Cazul $n = 512$.

Din **(1)** $\Rightarrow 100x + 13y + 21z = 511 \Rightarrow x \leq 4$.

$x = 1 \Rightarrow 13 / 8(z - 1) \Rightarrow z = 1$ și $13y = 390 \Rightarrow y = 30$, nu convine.

$x = 2 \Rightarrow 13 \mid 2z - 3 \Rightarrow z = 8$ și $y = 11$, nu convine.
$x = 3 \Rightarrow 13 \mid 8z - 3$, de unde $z = 2$ și $y = 13$, nu convine.
$x = 4 \Rightarrow 13 \mid 8z - 7 \Rightarrow z = 9$, nu convine. .... **(1p)**

Cazul $n = 729$.
Din **(1)** $\Rightarrow 100x + 13y + 21z = 728 \Rightarrow x \leq 7$.
Cum $13y \leq 117$ și $21z \leq 189$ rezultă $100x \geqslant 422$, adică $x \geqslant 5$.
$x = 5 \Rightarrow 13y + 21z = 228 \Rightarrow 13 \mid 8z - 7 \Rightarrow 8z - 7 = 65 \Rightarrow z = 9$ și $y = 3$.
Deci **539** $= \overline{xyz}$, soluție.
$x = 6 \xRightarrow{(1)} 13y + 21z = 128 \Rightarrow 13 \mid 8z - 11$, adică $8z - 11 \in \{0; 13; 26; 39; 52; 65\}$.
Avem soluția $8z - 11 = 13$, adică $z = 3$ și $y = 5$.
Deci **653** este soluție.
$x = 7 \xRightarrow{(1)} 13y + 21z = 28$, nu convine. .... **(1p)**

Cazul $n = 1000$.
Din **(1)** $\Rightarrow 100x + 13y + 21z = 999$ și $100x \geqslant 693 \Rightarrow x \geqslant 7$.
$x = 7 \Rightarrow 13 \mid 8z \Rightarrow z = 0$, nu convine.
$x = 8 \xRightarrow{(1)} 13y + 21z = 199$, de unde $13 \mid 8z - 4 \Rightarrow 13 \mid 2z - 1$.
$2z - 1 = 13 \Rightarrow z = 7$ și $y = 4$.
Deci **847** este soluție.
$x = 9 \xRightarrow{(1)} 13y + 21z = 99$, de unde $y = 6$ și $z = 1$.
Deci **961** este soluție.
În concluzie: $\overline{xyz} \in \{143; 302; 539; 653; 847; 961\}$. .... **(1p)**