Clasa a VII -a

SUBIECTUL I

a) Arătați că pătratul unui număr natural impar are cifra zecilor pară.
b) Determinați numerele prime care au cel puțin două cifre și, cărora dacă le eliminăm prima cifră se obține un pătrat perfect, iar dacă le eliminăm ultima cifră se obține un cub perfect al unui număr prim.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....**(1p)**

a) Fie $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = p^2$, $p \in \mathbb{N}$ cu a_0 cifră impară. Dacă $p = \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0}$, atunci:
$x = (\overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1} \cdot 10 + b_0)^2 = \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1}^2 \cdot 100 + \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1} \cdot 20 + b_0^2$, unde b_0 este cifră impară. ...**(1p)**
Cifra zecilor numărului b_0^2 dacă este nenulă, atunci ea este egală cu 2, 4 sau 8, adică pară.
Deci $x = (\overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1} \cdot 10 + \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1} \cdot 2) \cdot 10 + b_0^2$ are cifra zecilor pară. ....**(1p)**

b) – Dacă numărul x are două cifre, adică este de forma $\overline{ab}$, atunci $a \in \{1; 8\}$ și $b \in \{1; 4; 9\}$ și $\overline{ab} \in \{11; 14; 19; 81; 84; 89\}$. ....**(1p)**
Deoarece $\overline{ab}$ este prim, numerele 11, 19 și 89 sunt soluții. ....**(1p)**
– Dacă $x \geq 100$, $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, atunci cum a_0 este cifră impară, conform **a)** $\Rightarrow a_1$ este cifră pară. ....**(1p)**
Însă $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} = q^3$, $q > 2$, q prim, implică a_1 este cifră impară, contradicție! ....**(1p)**
Prin urmare, numerele care satisfac condițiile din enunț sunt: 11, 19 și 89.

SUBIECTUL II

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale prime ecuația $x^2 + y^2 = 10730$.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....**(1p)**
$x = 2$ sau $y = 2$ implică $x^2 = 10726$ sau $y^2 = 10726$ nu convine deoarece $10726 = M_4 + 2$. ....**(1p)**
Deci x și y sunt numere prime impare și pătratele lor au ultima cifră 1 sau 9.
Din $x^2 + y^2 = 10730$ rezultă că $U(x^2) = 1$ și $U(y^2) = 9$ sau $U(x^2) = 9$ și $U(y^2) = 1$. ....**(1p)**
Cum $10730 \leq 103^2$ rezultă că $x \leq 103$ și $y \leq 103$.
Putem considera $x \leq y$. Atunci $y \in \{103; 101; 97; 89; 83; 79\}$. ....**(1p)**
$y = 103 \Rightarrow x^2 = 121$, de unde $\boldsymbol{x = 11}$, soluție.
$y = 101 \Rightarrow x^2 = 529$, de unde $\boldsymbol{x = 23}$, soluție.
$y = 97 \Rightarrow x^2 = 1321$ - nu convine. ....**(1p)**
$y = 89 \Rightarrow x^2 = 2809$, de unde $\boldsymbol{x = 53}$, soluție.
$y = 83 \Rightarrow x^2 = 3841$ - nu convine.
$y = 79 \Rightarrow x^2 = 4489$, de unde $\boldsymbol{x = 67}$, soluție. ....**(1p)**
În concluzie, ecuația are soluțiile:
$(x, y) \in \{(103, 11), (11, 103), (101, 23), (23, 101), (89, 53), (53, 89), (67, 79), (79, 67)\}$. ....**(1p)**

SUBIECTUL III

În patrulaterul convex $ABCD$ se dă:

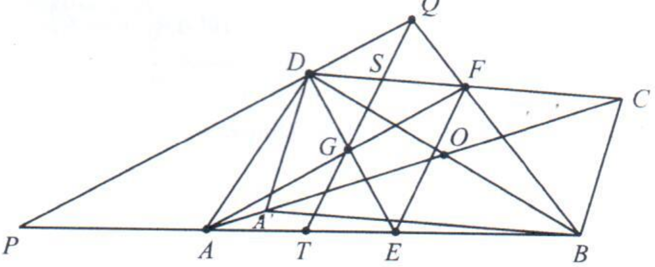
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$; $(OB) \equiv (OD)$; $\{O\} = AC \cap BD$; punctele E și F sunt mijloacele laturilor (AB) și, respectiv, (CD); $(PE) \equiv (AB)$; $A \in (PE)$ și $DP \cap BF = \{Q\}$; $DE \cap AF = \{G\}$ și $m(\sphericalangle BAD) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle ABC)$.

a) Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

b) Să se arate că punctul G este centrul de greutate al triunghiului QBP.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....**(1p)**



a) Presupunem că $ABCD$ nu e paralelogram. Deci $(AO) \not\equiv (OC)$.

Dacă $AO > OC$, atunci există $A' \in (OA)$ astfel încât $(OA') \equiv (OC)$.

Deci $A'BCD$ este paralelogram, de unde $m(\sphericalangle BA'D) = m(\sphericalangle DCB)$.

Dar $m(\sphericalangle BA'D) > m(\sphericalangle BAD)$ (***teorema unghiului exterior***), contradicție!

Arată analog, dacă $A \in (A'O)$. ....**(1p)**

Concludem că $ABCD$ este paralelogram și $m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle ABC) = 3 \cdot m(\sphericalangle BAD) = 180°$, de unde $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle BCD) = 60°$ și $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ADC) = 120°$. ....**(1p)**

b) Fie punctele T și S mijloacele segmentelor (AE) și (DF).

Avem $AP = AE = EB = DF$ și cum $AE \parallel DF \overset{def.}{\Rightarrow} AEFD$ este paralelogram, deci $(DG) \equiv (GE)$ și $G \in (TS)$.

(GT) linie mijlocie în ΔDAE, de unde $GT \parallel AD$. ....**(1p)**

Din $(DF) \equiv (BE)$ și $DF \parallel BE \Rightarrow BEDF$ paralelogram $\Rightarrow DG \parallel QF$.

Din $(AP) \equiv (DF)$ și $AP \parallel DF \Rightarrow APDF$ paralelogram $\Rightarrow DQ \parallel GF$.

Deci $DGFQ$ este paralelogram și punctele Q, S, G sunt coliniare. ....**(1p)**

(GS) este linie mijlocie în ΔDEF, deci $GS \parallel EF \parallel AD$.

Din $GT \parallel AD$ și $GS \parallel AD$ rezultă că punctele T, G, S, Q sunt coliniare.

$AEFD$ și $DGFQ$ sunt paralelograme $\Rightarrow GT = GS = SQ$, deci $TG = \frac{1}{3} \cdot TQ$. ....**(1p)**

Cum (QT) este mediană în ΔBPQ rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului BPQ. ....**(1p)**