Clasa a VIII -a

SUBIECTUL I

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\frac{x^3+1}{9}+\frac{x^3+2}{10}+\frac{x^3+3}{11}+\ldots+\frac{x^3+2017}{2025}=2017$.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....(1p)

– Dacă $x<2$, atunci $\frac{x^3+1}{9}<1$; $\frac{x^3+2}{10}<1$; $\frac{x^3+3}{11}<1$; …; $\frac{x^3+2017}{2025}<1$, nu convine. ....(2p)

– Dacă $x=2$, atunci $\frac{x^3+1}{9}=\frac{x^3+3}{11}=\ldots=\frac{x^3+2017}{2025}=1$, soluție. ....(2p)

– Dacă $x>2$, atunci $\frac{x^3+1}{9}>1$; $\frac{x^3+2}{10}>1$; …; $\frac{x^3+2017}{2025}>1$, nu convine. ....(1p)

Deci $x=2$, soluție. ....(1p)

SUBIECTUL II

a) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:

P: „$a=\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2024}}\right)+(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{2023}+\sqrt{2025})-$
$-(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{2024})$ și $a\in\mathbb{N}$."

b) Să se arate că ecuația $x^3+y^5=z^7$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale nenule.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....(1p)

a) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2024}}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+\ldots+$
$+\ldots+(\sqrt{2024}-\sqrt{2023})$. ....(1p)

$a=\sqrt{2025}-1=44$. Deci propoziția este adevărată. ....(1p)

b) Căutăm mai întâi o soluție particulară a ecuației date.

Putem porni de la egalitatea evidentă: $2^k+2^k=2^{k+1}$. ....(1p)

Căutăm un $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $k=\mathcal{M}_3$, $k=\mathcal{M}_5$ și $k+1=\mathcal{M}_7$.

Putem lua, de exemplu, $k=90$ (cel mai mic număr cu aceste proprietăți).

Avem: $(2^{30})^3+(2^{18})^5=(2^{13})^7$, **(1)**. ....(1p)

Deoarece $3\cdot5\cdot7=105$, înmulțim egalitatea **(1)** cu 2^{105n}, $n\in\mathbb{N}^*$ și obținem:

$(2^{30+35n})^3+(2^{18+21n})^5=(2^{13+15n})^7$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. ....(1p)

Concluzia dorită:

Toate tripletele de forma $(2^{30+35n}, 2^{18+21n}, 2^{13+15n})$, $n\in\mathbb{N}^*$ sunt soluții ale ecuației din enunț. ....(1p)

SUBIECTUL III

Fie semidreptele $(OX$, $(OY$ și $(OZ$ astfel încât: $OX\perp OY\perp OZ\perp OX$ și punctele A, B, C, unde $A\in(OX$,

$B \in (OY$ și $C \in (OZ$ cu $OA = OB = OC$.
Punctele A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele segmentelor (BC), (AC) și, respectiv, (AB); punctele A_2, B_2, C_2 sunt mijloacele segmentelor (OA_1), (OB_1) și, respectiv, (OC_1), iar punctele A_3, B_3, C_3 sunt mijloacele segmentelor (B_1C_1), (C_1A_1) și, respectiv, (A_1B_1).
Arătați că:
a) Dreptele A_2A_3, B_2B_3 și, C_2C_3 sunt concurente într-un punct P.
b) $PA_2 \perp PB_2 \perp PC_2 \perp PA_2$.
c) $OP \perp (ABC)$.

Barem de corectură și evaluare

Din oficiu ....**(1p)**

a) Din $\Delta OAB \equiv \Delta OAC \equiv \Delta OBC$ **(C.C.)** $\Rightarrow (AB) \equiv (AC) \equiv (BC)$, deci ΔABC este echilateral.

Fie $AB = a$. Aplicând ***teorema liniei mijlocii*** în $\Delta A_1B_1C_1$ și în ΔABC rezultă că:

$A_3B_3 = \dfrac{A_1B_1}{2} = \dfrac{a}{4}$; $B_3C_3 = A_3C_3 = \dfrac{a}{4}$.

Mai avem: $A_2B_2 = \dfrac{B_1A_1}{2} = \dfrac{a}{4}$; $A_2C_2 = B_2C_2 = \dfrac{a}{4}$.

Din$(A_2B_2) \equiv (A_3B_3)$ și $A_2B_2 \parallel A_3B_3 \Rightarrow A_2B_2A_3B_3$ este paralelogram, deci $A_2A_3 \cap B_2B_3 = \{P\}$ cu $(PB_3) \equiv (PB_2)$.
....**(1p)**
$(B_2C_2) \equiv (B_3C_3)$ și $B_2C_2 \parallel B_3C_3 \Rightarrow B_2C_2B_3C_3$ este paralelogram și $B_2B_3 \cap C_2C_3 = \{P\}$.
Deci $A_2A_3 \cap B_2B_3 \cap C_2C_3 = \{P\}$. ....**(1p)**

b) $\left.\begin{array}{l} A_2B_2 = \dfrac{a}{4}. \\ B_2A_3 = \dfrac{OC_1}{2} = \dfrac{AB}{4} \end{array}\right| \Rightarrow A_2B_2A_3B_3$ este romb.

Din $A_2B_2 \parallel AB$; $A_3B_2 \parallel OC_1$ și cum $AB \perp OC_1 \Rightarrow m(\sphericalangle A_2B_2A_3) = 90°$. ....**(1p)**
Deci $A_2B_2A_3B_3$ este pătrat. Arată, analog, că și patrulaterul $B_2C_2B_3C_3$ este pătrat.
Deci $PA_2 \perp PB_2 \perp PC_2 \perp PA_2$. ....**(1p)**

c) $(PA_2) \equiv (PB_2) \equiv (PC_2)$ și $\Delta A_2B_2C_2$ echilateral rezultă că $OP \perp (A_2B_2C_2)$. ...**(1p)**
Însă $(A_2B_2C_2) \parallel (A_1B_1C_1)$, deci și $(A_2B_2C_2) \parallel$
$\parallel (ABC)$. ....**(1p)**
În concluzie, $OP \perp (ABC)$.